



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

GEOMETRICKÉ MODELY ŘÍZENÍ ROBOTICKÉHO HADA

GEOMETRIC MODELS OF A SNAKE ROBOT CONTROL

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Roman Byrtus

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Mgr. Petr Vašík, Ph.D.

BRNO 2017

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky
Student: **Roman Byrtus**
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: Matematické inženýrství
Vedoucí práce: **Mgr. Petr Vašík, Ph.D.**
Akademický rok: 2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Geometrické modely řízení robotického hada

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Interpretace geometrických modelů řízení robotického hada až na úroveň řídicích sekvencí sloužících jako vstupy pro softwarovou simulaci. Zkoumání kvalitativních vlastností různých modelů řízení.

Cíle bakalářské práce:

Seznámení se s principy řízení robotického systému, s pojmy geometrická teorie řízení, aplikace na virtuálním nebo reálném modelu. Návrh kritérií pro kvalitativní srovnání konkrétních modelů řízení.

Seznam doporučené literatury:

JEAN, F. Control of nonholonomic systems: from sub-Riemannian geometry to motion planning. 1. New York: Springer, 2014. ISBN 978-3-319-08689-7.

SELIG, J. M. Geometric fundamentals of robotics. 2nd ed. New York: Springer, 2005. ISBN 0-38-20874-7.

MURRAY, R. M., Z. LI and S. SASTRY. A mathematical introduction to robotic manipulation. Boca Raton: CRC Press, c1994. ISBN 0-8493-7981-4.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tato práce se zabývá teorií geometrického řízení robotického hada. V práci jsou popsány základní pojmy diferenciální geometrie a teorie řízení, které jsou následně použity pro popis a odvození řídicího modelu robotického hada o třech člancích. Model je aplikován v simulačním prostředí V-REP.

Abstract

This thesis deals with the geometric theory of control of a robotic snake. The thesis includes required definitions of differential geometry and control theory, which are used to describe and derive the control model for a three segment robotic snake. The model is applied in the simulation environment V-REP.

Klíčová slova

Geometrická teorie řízení, robotický had, neholonomní mechanika, Lieova závorka, motion planning, serpenoidní input, V-REP

Keywords

Geometric control theory, robotic snake, nonholonomic mechanics, Lie bracket, motion planning, serpenoid input, V-REP

BYRTUS, R. Geometrické modely řízení robotického hada. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 35 s. Vedoucí bakalářské práce Mgr. Petr Vašík, Ph.D..

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Geometrické modely řízení robotického hada* vypracoval samostatně pod vedením Mgr. Petra Vašíka, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Roman Byrtus

Děkuji vedoucímu mé práce Mgr. Petru Vašíkovi, Ph.D. za veškeré připomínky a rady.

Roman Byrtus

Obsah

1	Úvod	12
2	Teoretický základ	13
2.1	Diferenciální geometrie	13
2.2	Algebraický základ	15
2.3	Základy teorie řízení	16
3	Neholonomní mechanika, dopředná a inverzní kinematika	18
3.1	Kinematika	18
3.2	Neholonomní mechanika	18
4	Řídící systémy prvního řádu	19
5	Řídící systémy druhého řádu	22
6	Aplikace na tříčlankovém hadovi	23
6.1	Odvození modelu	23
6.2	Formulace úlohy optimálního řízení	27
6.3	Motion planning	27
6.4	Dopředný pohyb	29
7	Simulační prostředí V-REP	29
8	Závěr	33
	Literatura	34

1 Úvod

V dnešní době nachází robotika stále více využití. Potřeby vykonávat různé činnosti motivují vývoj nových metod řízení a návrhů robotů, kteří jsou takové úkoly schopni efektivně plnit.

Robotický had je druh robota, který napodobuje pohyb hada. První výzkum v této oblasti provedl profesor Shigeo Hirose z Tokijského technologického institutu v 70. letech 20. století, avšak první analytický popis hadovitého pohybu pochází z roku 1946. Konstrukční řešení robotického hada profesora Hirose je založeno na řetězci článků, které se vůči sobě vzájemně natačejí. Každý článek řetězce je po stranách vybaven pasivními kolečky, která zajistí velký odpor v normálovém směru k článku.

Cílem této bakalářské práce je prozkoumat geometrickou teorii řízení a seznámit se s hlavními principy řízení robotických systémů, sestavit řídicí model pro tříčlankového hada a sestavit kritérium pro kvalitativní hodnocení modelu.

V kapitole 2 byly uvedeny teoretické základy z oblastí diferenciální geometrie, algebry a teorie řízení, které byly využity v dalších kapitolách.

V kapitole 3 byla rozebrána dopředná a inverzní kinematika. Dále byl uveden stručný popis problematiky neholonomních systémů a metod jejich řízení.

Kapitoly 4 a 5 pojednávají o řídicích systémech prvního a druhého řádu. Je zde uveden jejich obecný tvar, diskutováno optimální řídicí kritérium, odvození řídicích inputů a sestavení řídicích algoritmů.

V kapitole 6 byla popsána struktura robotického hada o třech člancích, které jsou ve svých středech vybaveny pasivními kolečky. Na každý článek hada je kladena neholonomní podmínka, která omezuje pohyb každého článku jen na jeho dopředný směr (nedochází ke smyku v žádném směru). Následně byly odvozeny kinematické rovnice, které byly dále využity k sestavení řídicího systému.

Pro řídicí systém jsou dále navrženy vhodné řídicí algoritmy. Veškeré výpočty jsou provedeny v matematickém prostředí Maple. Výsledky jsou závěrem ilustrovány v prostředí pro robotiku V-REP.

2 Teoretický základ

2.1 Diferenciální geometrie

Připomeňme, že Hausdorffův prostor je topologický prostor, ve kterém je možné každé dva body oddělit otevřenými množinami. *Homeomorfismus* je bijektivní spojitě zobrazení, jehož inverzní zobrazení je také spojitě.

Topologická n -rozměrná varieta je Hausdorffův prostor M se spočetnou bází, který je lokálně homeomorfní s \mathbb{R}^n , tedy pro každý bod $x \in M$ existuje jeho otevřené okolí $U \subset M$ a homeomorfismus $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Dvojice (U, φ) se nazývá lokální mapa. Soustava map $(U_\alpha, \varphi_\alpha), \alpha \in I$ na M taková, že U_α pokrývá množinu M , se nazývá atlas.

Poznámka: Požadavek spočetné báze je ekvivalentní tomu, aby z atlasu bylo možné vybrat konečný nebo spočetný systém map tak, aby pokrývaly celou varietu M .

Dvě lokální mapy $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)$ indukují zobrazení $\varphi_{12} := \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ mezi dvěma podmnožinami \mathbb{R}^n , které se nazývá přechodové zobrazení. Řekneme, že atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ variety M je třídy C^k , jestliže všechna přechodová zobrazení $\varphi_{\alpha\beta}$ jsou difeomorfismy třídy C^k (to znamená že $\varphi_{\alpha\beta}$ je bijekce třídy C^k taková, že inverzní zobrazení je rovněž třídy C^k). Mapa (U_0, φ_0) se nazývá slučitelná s atlasem $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ třídy C^k , jestliže každé přechodové zobrazení $\varphi_{0\alpha}$ je difeomorfismus třídy C^k . Atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ třídy C^k se nazývá úplný, jestliže obsahuje všechny mapy s ním slučitelné.

Definice 1. Diferencovatelná varieta třídy C^k je topologická varieta M spolu s úplným atlasem třídy C^k .

Zobrazení φ z lokální mapy (U, φ) je dáno n -ticí funkcí $(\varphi^1, \dots, \varphi^n)$, které zapisujeme ve tvaru (x^1, \dots, x^n) nebo (x^i) a nazýváme *lokální souřadnice* variety M , množinu U souřadnicovým okolím. Řekněme, že zobrazení $f : M \rightarrow N$ mezi varietami je třídy C^k , jestliže pro každé $x \in M$ a každou mapu (V, ψ) na N takovou, že $f(x) \in V$, existuje mapa (U, φ) na M taková, že $x \in U$ a zobrazení $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ je třídy C^k . Zobrazení $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ nazýváme souřadnicovým vyjádřením zobrazení f . Jsou-li y^p lokální souřadnice na N , tak toto souřadnicové vyjádření má tvar $y^p = f^p(x^1, \dots, x^n)$. Analogicky definujeme, že funkce $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ je třídy C^k . V dalším budeme předpokládat, že všechny variety (zobrazení, funkce) jsou třídy C^∞ a budeme je nazývat *hladkými*. Bijektivní zobrazení $f : M \rightarrow N$ se nazývá *difeomorfismus*, jestliže f i f^{-1} jsou hladké.

Nechť M je n -rozměrná varieta. Řekněme, že podmnožina $N \subset M$ je její *k -rozměrná podvarieta*, $k \leq n$, jestliže pro každý bod $x \in M$ existuje lokální mapa (U, φ) variety M taková, že $x \in U$ a φ zobrazí množinu $U \cap N$ na podmnožinu $V \subset \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ určenou rovnicemi $x^{k+1} = 0, \dots, x^n = 0$. Pak N je zřejmě k -rozměrnou varietou, přičemž $(U \cap N, \varphi|_{(U \cap N)})$ je její lokální mapou. Inverzní zobrazení k $\varphi : U \cap N \rightarrow V$ nazýváme *lokální parametrické vyjádření podvariety N* .

Dále definujeme pojem tečného vektoru na varietě M . Hladké zobrazení $f : I \rightarrow M, I \subset \mathbb{R}$ nazýváme dráhou na varietě M . Dále předpokládáme, že interval I obsahuje nulu.

Definice 2. Řekněme, že dvě dráhy $f, g : I \rightarrow M$ splňující $f(0) = g(0) = a$ se dotýkají v bodě $a \in M$, jestliže existuje souřadnicové okolí U bodu a s lokálními souřadnicemi (x^i) tak, že platí

$$\frac{d(x^i \circ f)(0)}{dt} = \frac{d(x^i \circ g)(0)}{dt}. \quad (1)$$

Vztah (1) nám určuje binární relaci dvou drah f, g . Tato relace je ekvivalence, jelikož je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Třídu ekvivalence drah $f(t)$ na M , které splňují $f(0) = a$ a dotýkají se v bodě $a \in M$ nazýváme tečný vektor variety M v bodě a a značíme $t_a = \frac{df(0)}{dt}$. Čísla $\xi^i := \frac{d(x^i \circ f)(0)}{dt}$ pak nazýváme souřadnicemi vektoru t_a v lokálních souřadnicích (x^i) .

Je-li $\varphi(x^i) : M \rightarrow \mathbb{R}$ libovolná hladká funkce na U , pak derivací funkce φ ve směru vektoru t_a definujeme následujícím vztahem:

$$t_a \varphi := \frac{d(\varphi \circ f)(0)}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(a)}{\partial x^i} \frac{d(x^i \circ f)(0)}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(a)}{\partial x^i} \xi^i.$$

Pro libovolné hladké funkce $\varphi, \psi : M \rightarrow \mathbb{R}$ definované v okolí bodu a platí

$$t_a(r\varphi + s\psi) = rt_a\varphi + st_a\psi, \quad t_a(\varphi \cdot \psi) = \varphi(a) \cdot t_a\psi + \psi(a) \cdot t_a\varphi, \quad r, s \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Tečný vektor lze ekvivalentně definovat jako operátor t_a , který přiřadí funkci $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ reálné číslo $t_a\varphi$ a který splňuje rovnici (2). Příkladem tečného vektoru je operátor $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_a$, který funkci φ přiřadí její derivaci v bodě a podle x^i .

Množinu $T_a M$ všech tečných vektorů variety M v bodě a nazýváme tečným prostorem variety M . Zřejmě $T_a M$ je n -rozměrný vektorový prostor, jehož bázi tvoří tečné vektory $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_a$.

Definice 3. Označme disjunktní sjednocení všech prostorů tečných k varietě M symbolem TM , tedy

$$TM := \cup_{a \in M} T_a M \quad \forall a \in M.$$

Platí, že sjednocení všech tečných prostorů má strukturu $2n$ -rozměrné diferencovatelné variety. TM nazveme tečným bandlem variety M .

Definice 4. Nechť TM je tečný bandl variety M . Vektorové pole na varietě M je hladké zobrazení $\mathbf{f} : M \rightarrow TM$, které každému bodu $a \in M$ přiřadí tečný vektor $\mathbf{f}(a) \in T_a M$.

Jsou-li (x^i) lokální souřadnice na souřadnicovém okolí U bodu $a \in M$, pak lze vektorové pole \mathbf{f} vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^n \mathbf{f}^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

kde $\mathbf{f}^i = \mathbf{f}^i(a)$ jsou hladké funkce na U . Pro hladkou funkci $k : M \rightarrow \mathbb{R}$ můžeme definovat její derivaci $\mathbf{f}k : M \rightarrow \mathbb{R}$ ve směru vektorového pole \mathbf{f} předpisem $(\mathbf{f}k)(a) = \mathbf{f}(a)k$, kde pravá strana znamená derivaci funkce k ve směru vektoru $\mathbf{f}(a) \in T_a M$. V lokálních souřadnicích platí $\mathbf{f}k = \sum_{i=1}^n \mathbf{f}^i(a) \frac{\partial k}{\partial x^i}$.

Dráha $\gamma : I \rightarrow M$ se nazývá integrální křivkou vektorového pole \mathbf{f} , jestliže vektor $\mathbf{f}(\gamma(t))$ je pro každé $t \in I$ tečným vektorem dráhy γ v bodě $\gamma(t)$, tedy

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = \mathbf{f}(\gamma(t)) \quad \forall t \in I.$$

Řešením obyčejných diferenciálních rovnic $\frac{dx^i}{dt} = \mathbf{f}^i(x^1, \dots, x^n)$ nalezneme integrální křivky vektorového pole. Z teorie ODR plyne, že pro každý bod $a \in M$ existuje otevřený interval I_a obsahující 0 a integrální křivka $\gamma_a : I_a \rightarrow M$ vektorového pole \mathbf{f} taková, že $\gamma_a(0) = a$. Je-li interval I_a maximální, pak je γ_a jediná. Dále množina $\mathcal{D}\mathbf{f} = \cup_{a \in M} I_a \times a \subset \mathbb{R} \times M$ je otevřená a zobrazení $\Phi^{\mathbf{f}} : \mathcal{D}\mathbf{f} \rightarrow M$ definované vztahem $\Phi^{\mathbf{f}}(t, a) = \gamma_a(t)$ je hladké. Zobrazení $\Phi^{\mathbf{f}}$ se nazývá tok vektorového pole \mathbf{f} .

Definice 5. Necht \mathbf{f}, \mathbf{g} jsou hladká vektorová pole na varietě M , bod $a \in \mathbb{R}^n$. Operaci Lieovy závorky polí \mathbf{f}, \mathbf{g} definujeme následujícím způsobem:

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}](a) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial a} \mathbf{f}(a) - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial a} \mathbf{g}(a),$$

kde $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial a}$, resp. $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial a}$ jsou Jacobiho matice, tedy například pro pole \mathbf{f}

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{f}^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{f}^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{f}^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}.$$

Operace Lieovy závorky vyjadřuje infinitezimální pohyb, který vznikne tokem po čtverci definovaném poli \mathbf{f}, \mathbf{g} .

Definice 6. Necht M je hladká varieta dimenze m . Označme tečný prostor v libovolném bodě variety $a \in M$ jako $T_a M$. Pak n -rozměrnou distribucí na varietě M , $m \geq n$, rozumíme hladké přiřazení n -rozměrného podprostoru $T_a M$ každému bodu $a \in M$ a značíme ji Δ .

Označme lineární obal jako span . Pokud je distribuce dána množinou hladkých vektorových polí $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n$, pak distribuci vyjádříme vztahem

$$\Delta = \text{span}\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_n\}.$$

Definice 7. Uvažujme distribuci $\Delta = \text{span}\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m\}$. Definujme $\Delta_1 = \Delta$ a dále

$$\Delta_i = \Delta_{i-1} + [\Delta_1, \Delta_{i-1}],$$

kde

$$[\Delta_1, \Delta_{i-1}] = \text{span}\{[\mathbf{g}, \mathbf{h}] : \mathbf{g} \in \Delta_1, \mathbf{h} \in \Delta_{i-1}\}.$$

Systém distribucí Δ_i nazveme filtrací přidruženou distribuci $\Delta = \Delta_1$.

2.2 Algebraický základ

Nyní uveďme důležité pojmy, které potřebujeme pro zavedení speciální ortogonálních grupy a algebry. Pro připomenutí si uvedeme i definici grupy a pole.

Definice 8. Uvažujme dvojici $(H, *)$, kde H je množina a $*$ je binární operace definovaná na množině H , značíme $a * b$, $a, b \in H$. Tuto dvojici nazveme grupou, pokud splňuje následující požadavky:

1. Uzavřenost: $\forall a, b \in H : a * b = c \in H$.
2. Asociativita: $\forall a, b, c \in H : (a * b) * c = a * (b * c)$.

3. Existence neutrálního prvku e : $\forall a \in H \exists e \in H : a * e = e * a = a$.
4. Existence inverzního prvku: $\forall a \in H \exists b : a * b = b * a = e$.

Definice 9. Uvažujme množinu F spolu se dvěma binárními operacemi, které označíme \oplus, \odot . Uspořádanou trojici (F, \oplus, \odot) nazveme polem, pokud platí:

1. Operace \oplus a \odot jsou asociativní.
2. Komutativita: $\forall a, b \in F : a \oplus b = b \oplus a$ a také $a \odot b = b \odot a$.
3. Existují dva různé prvky $0, 1$ v F tak, že platí: $\forall a \in F : a \oplus 0 = a$ a také $a \odot 1 = a$.
4. Pro všechna $a \in F$ existuje prvek $-a$, pro který platí $a \oplus (-a) = 0$.
5. Pro všechna $a \in F, a \neq 0$ existuje prvek a^{-1} , pro který platí: $a \odot a^{-1} = 1$.
6. Distributivita: $\forall a, b, c \in F : a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$.

Definice 10. Lieova grupa je grupa H , která je zároveň hladkou varietou konečné dimenze a pro kterou jsou operace na grupě $(a, b) \rightarrow ab$ a $g \rightarrow g^{-1}$ hladké.

Definice 11. Grupa všech čtvercových reálných nesingulárních (tj. $\det(A) \neq 0, \mathbf{A} \in H$) matic dimenze n se nazývá obecná lineární grupa a značíme $GL(n, \mathbb{R})$. Tuto grupu můžeme chápat i jako varietu, která je otevřená podmnožina \mathbb{R}^{n^2} . Pro matice $\mathbf{A}, \mathbf{G} \in H$ je operací na grupě násobení matic:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}.$$

Inverzní prvek matice \mathbf{A} je dán její inverzní maticí \mathbf{A}^{-1} . Obě operace jsou hladké, jelikož operace využitě během násobení matic (sčítání a násobení prvků) a sestavení inverzní matice jsou také hladké. Neutrálním prvkem je jednotková matice řádu n .

Definice 12. Speciální ortogonální grupa $SO(n)$ je podgrupa obecné lineární grupy. Definujeme ji vztahem

$$SO(n) = \{R \in GL(n, \mathbb{R}) : RR^T = I, \det R = +1\}.$$

Definice 13. Lieova algebra je vektorový prostor \mathfrak{g} nad polem F spolu s binární operací Lieovy závorky.

Jako konkrétní příklad Lieovy algebry uveďme Lieovu algebru speciálních ortogonálních matic dimenze n $so(n)$. Připomeňme, že speciální matice jsou takové matice, jejichž determinant je roven jedné. Ortogonální matice \mathbf{A} je taková matice, pro kterou platí: $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{E}$, kde \mathbf{E} je reálná čtvercová matice. Pro matice náležící algebře $so(n)$ také platí, že jejich stopa je rovna nule, tedy $tr(\mathbf{A}) = 0$.

2.3 Základy teorie řízení

Pro teorii řízení je důležitým pojmem dynamický systém:

Definice 14. Dynamickým systémem rozumíme dvojici (ρ, Ω) , kde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a $\rho(t, x) : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \Omega$ je spojitě zobrazení, splňující:

1. $\rho(0, x) = x$ pro $\forall x \in \Omega$,
2. $\rho(s, \rho(t, x)) = \rho(s + t, x)$ pro $\forall x \in \Omega, t, s \in \mathbb{R}$.

Příkladem dynamického systému je například diferenciální rovnice

$$x' = f(x), \quad (3)$$

kde $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ je daná funkce, která určuje dynamický systém (ρ, Ω) pomocí řešící funkce

$$\rho : (t, x_0) \rightarrow x(t),$$

kde $x(t)$ je řešení (3) s počáteční podmínkou $x(0) = x_0$. Z obecných vět o existenci a jednoznačnosti plyne, že pokud je $f \in C^k$, $k \geq 1$, je φ korektně definováno (alespoň pro t blízká nule) a φ je také třídy C^k . Lze ukázat, že každý dynamický systém (za předpokladu $\varphi \in C^1$) vzniká jako řešící funkce určité diferenciální rovnice tvaru (3). Pro lineární rovnici

$$x' = Ax,$$

kde A je konstantní matice, lze odpovídající dynamický systém napsat explicitně pomocí exponenciály matice:

$$\rho(t, x) = e^{tA}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k x}{k!}.$$

Globální existence řešení obecně pro nelineární funkce f není zaručena.

Uveďme nyní důležité pojmy z teorie řízení. Uvažujme nelineární systém na množině $B \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$\dot{b} = p(b, u),$$

kde B nazveme stavový prostor, $b \in B$ je stav a $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ je řídicí veličina (dále input). Soustavu můžeme zapsat také ve tvaru

$$\dot{b} = Pu, \quad (4)$$

kde P je matice vektorových funkcí definovaných na B . Všimněme si, že systém (4) je dle Definice 7 dynamickým systémem. Systém (4) nazveme *řídicím systémem*. Pokud uvažujeme input $u(t)$, $t \in [0, T]$, pak trajektorii přidruženou $u(\cdot)$ definujeme jako řešení neautonomní obyčejné diferenciální rovnice $\dot{b} = p(b, u(t))$.

Řídit systém (4) znamená najít vhodný input $u(\cdot)$ takový, abychom se z bodu $b(0) = b_0 \in B$ za čas T dostali do bodu $b_f = b(T) \in B$. Řekněme tedy, že systém (4) je říditelný, pokud pro všechna $b \in B$ existují $T > 0$ a input $u(t)$ takové, že přidružená trajektorie spojuje body b_0 a b_f .

Řekněme, že systém je lokálně říditelný v bodě b_0 , pokud jsme schopni za malý čas T dosáhnout blízkých bodů v okolí bodu b_0 . Uvažujme množinu $V \subseteq B$. Označme $\mathcal{R}^V(b_0, T)$ jako množinu stavů b_f pro které platí, že existuje $u : [0, T] \rightarrow U$, které řídí systém (4) z bodu b_0 do bodu b_f a splňuje $b(t) \in V$ pro $0 \leq t \leq T$. Dále definujeme

$$\mathcal{R}^V(b_0, \leq T) = \bigcup_{0 < \tau \leq T} \mathcal{R}^V(b_0, \tau)$$

jako množinu všech dosažitelných stavů až do času T . Systém je lokálně říditelný na malém časovém úseku, pokud $\mathcal{R}^V(b_0, \leq T)$ obsahuje okolí b_0 pro všechna $T > 0$ a okolí V bodu b_0 . Tedy pro všechna okolí V bodu b_0 existuje trajektorie, která celá leží ve V a spojuje b_0 s nějakým bodem ležícím b_f v množině V .

Stavy, pro které neexistuje trajektorie, která by je spojovala se stavy dosažitelnými, nazveme nedosažitelnými stavy.

3 Neholonomní mechanika, dopředná a inverzní kinematika

3.1 Kinematika

Chceme-li řídit nějaký systém, řešíme úlohu plánování celkového pohybu, který systém vykoná. Proces určení jednotlivých pohybů tvořící tento celek v časově diskrétních intervalech se nazývá motion planning. Často požadujeme, aby tyto pohyby byly alespoň z části optimální.

Dopředná kinematika využívá kinematických rovnic k určení pohybu, který soustava vykoná za daný časový úsek. Například uvažujme těleso, jehož polohu určují souřadnice x, y . Na začátku pohybu v čase $t = 0$ je jeho poloha $x = x_0, y = y_0$. Zvolme například následující řídicí systém tělesa:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \cos(t \cdot u_1), \\ \dot{y} &= \sin(t \cdot u_2),\end{aligned}\tag{5}$$

kde u_1, u_2 jsou konstantní inputy.

Chceme zjistit, jak se těleso pohne za časový úsek $T = \pi$. Zvolme inputy $u_1 = 1, u_2 = 1$. Pak polohu tělesa v čase $t = \pi$ vyjádříme takto:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + \int_0^\pi \cos t \, dt = x_0, \\ y &= y_0 + \int_0^\pi \sin t \, dt = y_0 + 2.\end{aligned}$$

Tedy na konci pohybu bude x -ová souřadnice x_0 (stejná jako na počátku), zatímco y -ová souřadnice se zvětší o 2.

Inverzní kinematika naopak z požadované polohy určuje tvar řídicího systému. Uvažujme systém (5). Řekněme, že chceme, aby se těleso pohnulo z počáteční polohy $[0, 0]$ v čase $t = 0$ do polohy $[0, -2]$ v čase $t = \pi$. Požadujeme tedy, aby platilo:

$$\begin{aligned}x &= \int_0^\pi \cos(t \cdot u_1) \, dt = 0, \\ y &= \int_0^\pi \sin(t \cdot u_2) \, dt = -2.\end{aligned}$$

Vidíme tedy, že pro tento pohyb můžeme input u_1 zvolit libovolně. Druhý input zvolíme $u_2 = -1$.

3.2 Neholonomní mechanika

Neholonomní vazbou nazveme omezení, které nelze zapsat ve tvaru

$$\eta(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0.$$

Neholonomní mechanika se zabývá mechanickým pohybem těles, které jsou ovlivněny neholonomní vazbou. Neholonomní systém nazveme řídicí systém (4) ve tvaru

$$\dot{q} = u_1 g_1(q) + \dots + u_m g_m(q), \quad q \in M, u = (u_1, \dots, u_m) \in R^m,$$

kde $m \in \mathbb{N}$ a $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m$ jsou vektorová pole třídy C^∞ na M .

Pokud chceme řídit systém s neholonomními podmínkami, musíme dávat pozor, abychom ve stavovém prostoru neprocházeli nedosažitelnými oblastmi, tedy konfiguracemi systému, která nejsme schopni dosáhnout například z důvodu vnějších vlivů (překážka na trase) a nebo konstrukčních omezení.

Uveďme nyní některé z hlavních metod motion planningu pro neholonomní systémy:

- Optimální řízení - jedna z nejpoužívanějších metod teorie řízení. Podstata metody spočívá v přiřazení účelového funkcionálu každé trajektorii (jedná se o pohyb ve stavovém prostoru), kterou uvažujeme; následně omezíme hledání na trajektorie, které minimalizují účelovou funkci. Typické účelové funkce jsou například délka dráhy (ve vhodné metrice), řídicí cena (například velikost vstupu, což může být norma v dané metrice) a nebo čas, za který jsme trajektorii schopni projít.
- Po částech konstantní inputy - neholonomní systémy jsme také schopni řídit pomocí po částech konstantních inputů. Princip metody je jednoduchý - spočívá ve volbě konstantních inputů v každém časovém kroku. Teoreticky jsme schopni vybrat nějaký časový interval, na kterém uvažujeme posloupnosti všech možných inputů (zdiskretizovaných na konečný počet hodnot); například, pokud máme 5 inputů a uvažujeme časový krok 1 sekundy, pak simulujeme pohyb všech 5 inputů najednou za tento krok - dostáváme 5 nových poloh a pro každou z nich proces opakujeme. Vidíme, že výpočetní náročnost této metody roste exponenciálně, proto tento přístup není vhodný.
V nedávných letech došlo k vývoji řídicího algoritmu využívajících po částech spojitě inputy pro třídu systémů, které jsou nilpotentní (distribuce s lineárním obalem $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m$ je nilpotentní řádu k , jestliže všechny Lieovy závorky řádu většího než k zmizí - to znamená, že nejsou lineárně nezávislé s poli $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m$ a jejich závorkami), což výrazně zjednodušuje potřebné výpočty k řízení systému.
- Kanonické dráhy - problém neholonomního plánování drah řeší pomocí výběru určitých drah, které využijeme k realizaci žádaného pohybu. Například, pokud uvažujeme plánování dráhy pro auto, které jsme schopni natočit a nebo jet v dopředném směru. Pak pomocí kombinace těchto dvou pohybů jsme schopni uskutečnit jakýkoliv pohyb.

4 Řídicí systémy prvního řádu

Uvažujme řídicí systém tvaru

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{g}_1(\mathbf{q})u_1 + \dots + \mathbf{g}_m(\mathbf{q})u_m, \quad (6)$$

kde vektorová pole $\mathbf{g}_i(\mathbf{q}), i = 1, \dots, m$ a jejich Lieovy závorky prvního stupně $[\mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k], j < k, k = 1, \dots, m$ jsou lineárně nezávislé a navíc platí

$$T_{\mathbf{q}}\mathbb{R}^n = \text{span}\{\mathbf{g}_i, [\mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k] : i, j, k = 1, \dots, m\}.$$

Pak tento systém nazveme řídicím systémem 1. stupně. Důležitá třída řídicích systémů, které splňují tuto podmínku, byla navržena Brockettem[3].

Ukažme vlastnosti této třídy systémů na příkladě:

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= u_1, \\ \dot{q}_2 &= u_2, \\ \dot{q}_3 &= q_1 u_2 - q_2 u_1.\end{aligned}$$

Pro tento systém platí:

$$\mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -q_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ q_1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Uvažujme problém řízení tohoto systému z bodu $q_0 \in \mathbb{R}^3$ v čase $t = 0$ do bodu $q_f \in \mathbb{R}^3$ v čase $t = 1$. Systém budeme řídit tak, aby byl součet čtverců řídicí funkce minimální, tedy aby funkcionál

$$\int_0^1 \|u\|^2 dt \quad (7)$$

byl minimální. Jelikož $\dot{q}_i = u_i$ pro $i = 1, 2$, můžeme poslední rovnici systému zapsat jako podmínku tvaru

$$\dot{q}_3 = q_1 \dot{q}_2 - q_2 \dot{q}_1.$$

Minimalizace funkcionálu (7) je ekvivalentní s úlohou minimalizovat Lagrangián, který zapíšeme ve tvaru $\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2$. Pokud na omezení aplikujeme metodu Lagrangeových multiplikátorů, rozšíříme Lagrangián na následující tvar:

$$L(q, \dot{q}) = (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \lambda(\dot{q}_3 - q_1 \dot{q}_2 + q_2 \dot{q}_1).$$

Řešením problému vázaného extrému dostáváme:

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 + \lambda \dot{q}_2 &= 0, \\ \ddot{q}_2 + \lambda \dot{q}_1 &= 0, \\ \dot{\lambda} &= 0.\end{aligned} \quad (8)$$

Z poslední rovnice vidíme, že $\lambda(t)$ je konstantní, a navíc, že optimální řídicí inputy splňují rovnice:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} := \Lambda \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Všimněme si, že matice Λ je antisymetrická, jelikož jsou λ konstantní, z čehož vyplývá, že optimální inputy jsou sinusoidy s frekvencí λ , tedy:

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\lambda t) & -\sin(\lambda t) \\ \sin(\lambda t) & \cos(\lambda t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix} := e^{\Lambda t} u(0).$$

Pokud tedy zvolíme body q_0, q_f , můžeme nyní najít $u(0)$ a λ , které budou tento systém řídit optimálně. Ze soustavy (8) vyplývá, že stavy q_1 a q_2 můžeme řídit přímo. Zajímá nás, jak systém řídit z bodu $q(0) = (0, 0, 0)$ do bodu $q(1) = (0, 0, a)$. Přímo integrací \dot{q}_1, \dot{q}_2 dostáváme:

$$\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} = (e^{\Lambda t} - E)\Lambda^{-1}u(0),$$

kde E je jednotková matice. Protože platí $q_1(1) = q_2(1) = 0$, dostáváme $e^\Lambda = E$, takže $\lambda = 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Integrací \dot{q}_3 dostáváme

$$q_3(1) = \int_0^1 (q_1 u_2 - q_2 u_1) dt = -\frac{1}{\lambda} (u_1^2(0) + u_2^2(0)) = a.$$

Hodnota řídicí funkce u je tedy

$$\int_0^1 \|u\|^2 dt = \|u(0)\|^2 = -\lambda a.$$

Jelikož $\lambda = 2\pi n$, dostáváme, že minimální hodnotu řídicí funkce nabývá pro $n = -1$ a platí $\|u(0)\|^2 = 2\pi n$. Ačkoliv je velikost $u(0) \in \mathbb{R}$ daná, směr může být libovolný. Tedy, optimální input, který řídí systém mezi body $(0, 0, 0)$ a $(0, 0, a)$ je sumou sinů a kosinů o frekvenci 2π (obecně řečeno $\frac{2\pi}{T}$, kde časový interval řízení je T). Zobecněním systému (8) na systém m -inputů dostáváme

$$\dot{q}_i = u_i \quad i = 1, \dots, m, \quad (9)$$

$$\dot{q}_{ij} = q_i u_j - q_j u_i \quad i < j = 1, \dots, m. \quad (10)$$

Rovnice vyjádříme pomocí antisymetrické matice $Y \in so(m)$, kde dolní trojúhelník matice pod diagonálou tvoří prvky $-q_{ij}$; dostáváme tak řídicí systém v $\mathbb{R}^m \times so(m)$:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= u, \\ \dot{Y} &= qu^T - uq^T. \end{aligned}$$

Euler-Lagrangovy rovnice pro tento systém jsou obdobné jako u systému s dvěma inputy, tedy:

$$\begin{aligned} \ddot{q} - \Lambda \dot{q} &= 0, \\ \dot{\Lambda} &= 0, \end{aligned}$$

kde $\Lambda \in so(m)$ je antisymetrická matice Lagrangeových multiplikátorů, které dostaneme z matice Y . Jako v minulém příkladu je Λ konstantní a optimální inputy tedy splňují

$$\dot{u} = \Lambda u$$

tak, aby

$$u(t) = e^{\Lambda t} u(0).$$

Z toho vyplývá, že $e^{\Lambda t} \in SO(m)$. Zajímají nás tedy vlastnosti inputů pokud $q(0) = q(1) = 0$, $Y(0) = 0$ a $Y(1)$ je daná matice v $SO(m)$. V [3] bylo ukázáno, že pokud m je sudé a Y je nesusingularní, inputem je $m/2$ sinusoid o frekvencích

$$2\pi, 2 \cdot 2\pi, \dots, (m)/2 \cdot 2\pi.$$

Pokud je m liché, pak Y je singularní matice, ale pokud je hodnosti $m-1$, pak inputem je $(m-1)/2$ sinusoid o frekvencích

$$2\pi, 2 \cdot 2\pi, \dots, (m-1)/2 \cdot 2\pi.$$

Tyto poznatky můžeme využít k sestavení následujícího algoritmu pro řízení systému (9).

Algoritmus 1. Algoritmus řízení kanonického systému prvního stupně

1. Zvolením inputu řídíme q_i na žádanou hodnotu bez ohledu na změnu q_{ij} .
2. Využitím sinusoid o pevně svázaných frekvencích najdeme u_0 takové, že input určí q_{ij} na žádané hodnoty. Vhodnou volbou inputu se q_i nemění.

Algoritmem řídíme stavy krok po kroku. Nejdříve řídíme stavy, které jsou říditelné přímo (nultého řádu), a poté řídíme směry prvních Lieových závorek. Využitím sinusoidálního inputu lze tedy aproximovat pohyb ve směru Lieovy závorky.

5 Řídící systémy druhého řádu

Uvažujme systémy, ve kterých první řád Lieových závorek není dostatečný k tomu, aby generoval celý tečný prostor $T_q\mathbb{R}^n$. Začneme rozšířením předešlého kanonického tvaru (6) na vyšší řád závorek:

$$\dot{q}_i = u_i \quad i = 1, \dots, m \quad (11)$$

$$\dot{q}_{ij} = q_i u_j \quad 1 \leq i < j \leq m \quad (12)$$

$$\dot{q}_{ijk} = q_{ij} u_k \quad 1 \leq i, j, k \leq m \text{ (mod Jacobiho identita)}. \quad (13)$$

Dle Jacobiho identity platí (pro všechny cyklické záměny indexů)

$$[\mathbf{g}_i, [\mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k]] + [\mathbf{g}_k, [\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j]] + [\mathbf{g}_j, [\mathbf{g}_k, \mathbf{g}_i]] = 0,$$

tedy pro všechna i, j, k platí, že ne všechny stavy tvaru q_{ijk} jsou říditelné. Z tohoto důvodu označujeme poslední z předešlých rovnic jako "mod Jacobiho identita". Vskutku, přímým, ovšem pracným výpočtem lze ukázat, že platí [1]:

$$q_{231} - q_{132} = q_1 q_{23} - q_2 q_{13}.$$

V [1] bylo ukázáno, že maximální počet říditelných q_{ijk} je

$$\frac{(m+1)m(m-1)}{3}.$$

Sestrojení Lagrangiánu s integrální účelovou podmínkou (7) na rozdíl od systémů prvního řádu obecně nevede ke konstantním Lagrangeovým multiplikátorům. V případě $m = 2$, bylo v [4] ukázáno, že optimální inputy jsou eliptické funkce. I přesto můžeme Algoritmus 1 rozšířit na tento případ:

Algoritmus 2. Algoritmus řízení kanonického systému druhého stupně

1. Řídíme q_i na požadované hodnoty. Tím dojde k driftu, tedy k posunu, v ostatních stavech.
2. Řídíme q_{ij} na požadované hodnoty využitím pevně svázaných sinusoidálních inputů. Pokud měl i -tý input frekvenci ω_i , q_{ij} bude o frekvenci $\omega_i \pm \omega_j$. Zvolením inputů tak, že dostaneme frekvenční složky v nule, můžeme generovat pohyb v žádaném směru.

3. Použijeme znovu sinusoidální inputy, abychom jsme pohnuli všechny řízené stavy na původní hodnoty a generovali pohyb pouze ve směru q_{ijk} . Je nutné správně zvolit frekvence inputů tak, aby $\omega_i \pm \omega_j \neq 0$, ale zároveň $\omega_i + \omega_j + \omega_k$ mělo nulové frekvenční složky.

Výpočty požadované pro krok 2 tohoto algoritmu jsou identické jako u algoritmu prvního. Výpočty potřebné v kroku 3 jsou obecně pracné, ovšem u vybraných systémů jsou přímočaré. Například, pokud $m = 2$ můžeme systém (11) zapsat v následujícím tvaru:

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= u_1, \\ \dot{q}_2 &= u_2, \\ \dot{q}_{12} &= q_1 u_2, \\ \dot{q}_{121} &= q_{12} u_1, \\ \dot{q}_{122} &= u_{12} u_2.\end{aligned}$$

Pro řízení q_1, q_2 , a q_{12} do požadovaných poloh použijeme Algoritmus 1. Pro řízení q_{121} nezávisle na ostatních stavech zvolíme $u_1 = a \sin(2\pi t)$, $u_2 = b \cos(4\pi t)$, $a, b \in \mathbb{R}$ a získáváme:

$$q_{121}(1) = q_{121}(0) - \frac{a^2 b}{16\pi^2}.$$

Obdobně, zvolením $u_1 = b \cos(4\pi t)$, $u_2 = a \sin(2\pi t)$ dostáváme

$$q_{121}(1) = q_{121}(0) + \frac{a^2 b}{32\pi^2}$$

a všechny ostatní stavy se vrátí do původních hodnot. Oba algoritmy zmíněné výše vyžadují oddělené kroky pro řízení ve směru každého q_{ijk} . Je také možné generovat celkový pohyb ve více souřadnicích najednou použitím lineární kombinace sinusoid a vyřešením polynomiální rovnice pro získání potřebných koeficientů.

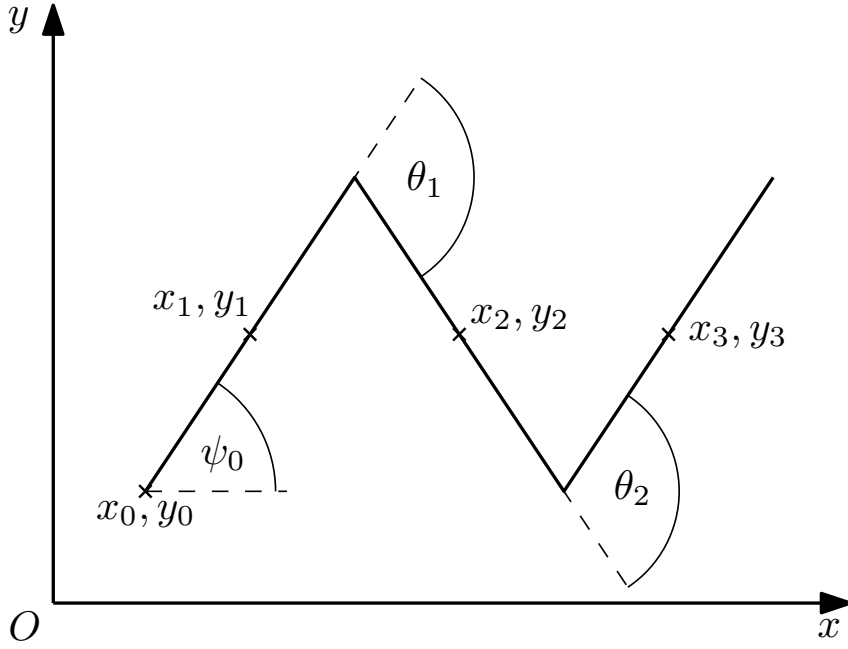
6 Aplikace na tříčlankovém hadovi

6.1 Odvození modelu

Robotický had se skládá ze tří článků spojených klouby, které jsou poháněny servomotory umožňující řídit natáčení článků vůči sobě. Ve středu každého článku jsou umístěna pasivní kolečka, která výrazně zvyšují tření článků do stran a snižují tření v dopředném směru (oproti článkům bez koleček). Sledujeme pohyb hada v hlavovém bodu o souřadnicích x_0, y_0 vzhledem ke globálnímu souřadnému systému (x, y) . Jako absolutní úhel natočení označíme úhel ψ_0 , který svírá první článek hada s osou x globálního souřadného systému. Jako relativní úhly natočení označíme úhly θ_1, θ_2 , které svírají dotýkající se články hada, viz Obrázek 1.

Stavový prostor robotického hada tedy tvoří varieta M dimenze 5, jejíž každý bod q je tvaru $q = (x, y, \psi_0, \theta_1, \theta_2)$. Tečný vektor na varietě označme $\dot{q} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{\psi}_0, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$. Varietu tvořící stavový prostor hada lze popsat také jako $\mathbb{R}^2 \times (S^1)^3$, kde $(S^1)^3$ je kartézský součin tří jednotkových kružnic.

Nyní odvodíme kinematické rovnice robotického hada. Nejdříve vyjádříme polohu středu každého z článků pomocí souřadnic (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$ a souřadnic hlavového bodu:



Obrázek 1: Schéma robotického hada

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 + l \cos \psi_0, \\x_2 &= x_0 + l \cos(\psi_0 + \theta_1) + 2l \cos \psi_0, \\x_3 &= x_0 + l \cos(\psi_0 + \theta_1 + \theta_2) + 2l \cos(\psi_0 + \theta_1) + 2l \cos \psi_0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_1 &= y_0 + l \sin \psi_0, \\y_2 &= y_0 + l \sin(\psi_0 + \theta_1) + 2l \sin \psi_0, \\y_3 &= y_0 + l \sin(\psi_0 + \theta_1 + \theta_2) + 2l \sin(\psi_0 + \theta_1) + 2l \sin \psi_0.\end{aligned}$$

Vektor rychlosti ve středu každého z článků $\dot{\mathbf{v}}_i = (\dot{x}_i, \dot{y}_i)$ dostaneme derivací polohy dle času:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \dot{x}_0 - l\dot{\psi}_0 \sin \psi_0, \\ \dot{x}_2 &= \dot{x}_0 - l(\dot{\psi}_0 + \dot{\theta}_1) \sin(\psi_0 + \theta_1) - 2l\dot{\psi}_0 \sin \psi_0, \\ \dot{x}_3 &= \dot{x}_0 - l(\dot{\psi}_0 + \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\psi_0 + \theta_1 + \theta_2) - 2l(\dot{\psi}_0 + \dot{\theta}_1) \sin(\psi_0 + \theta_1) - 2l\dot{\psi}_0 \sin \psi_0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= \dot{y}_0 + l\dot{\psi}_0 \cos \psi_0, \\ \dot{y}_2 &= \dot{y}_0 + l(\dot{\psi}_0 + \dot{\theta}_1) \cos(\psi_0 + \theta_1) + 2l\dot{\psi}_0 \cos \psi_0, \\ \dot{y}_3 &= \dot{y}_0 + l(\dot{\psi}_0 + \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\psi_0 + \theta_1 + \theta_2) + 2l(\dot{\psi}_0 + \dot{\theta}_1) \cos(\psi_0 + \theta_1) + 2l\dot{\psi}_0 \cos \psi_0.\end{aligned}$$

Pohyb hada je ovšem omezen neholonomní podmínkou, která vyjadřuje požadavek pohybu každého z článků jen v dopředném směru - nedochází tedy ke smýkání koleček do stran. To znamená, že vektor rychlosti \mathbf{v}_i i -tého kolečka je po celou dobu kolmý k normálovému vektoru \mathbf{n}_i i -tého článku hada. Tento fakt vyjádříme pomocí skalárního součinu:

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i = 0. \quad (14)$$

Vyjádříme směrové vektory každého z článků:

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_1 &= (\cos \psi_0, \sin \psi_0), \\ \mathbf{s}_2 &= (\cos \theta_1, \sin \theta_1),\end{aligned}$$

$$\mathbf{s}_3 = (\cos \theta_2, \sin \theta_2).$$

Ke směrovému vektoru každého článku sestrojíme normálový:

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_1 &= (-\sin \psi_0, \cos \psi_0), \\ \mathbf{n}_2 &= (-\sin(\psi_0 + \theta_1), \cos(\psi_0 + \theta_1)), \\ \mathbf{n}_3 &= (-\sin(\psi_0 + \theta_1 + \theta_2), \cos(\psi_0 + \theta_1 + \theta_2)).\end{aligned}$$

Roznásobením neholonomní podmínky (14) v jednotlivých člancích hada dostáváme soustavu tří rovnic:

$$\begin{aligned}l\dot{\psi}_0 + \dot{y}_0 \cos \psi_0 - \dot{x}_0 \sin \psi_0 &= 0, \\ (2l\dot{\psi}_0 \cos \psi_0 + \dot{y}_0) \cos(\psi_0 + \theta_1) + (2l\dot{\psi}_0 \sin \psi_0 - \dot{x}_0) \sin(\psi_0 + \theta_1) + l(\dot{\psi}_0 + \dot{\theta}_1) &= 0, \\ (2l(\dot{\psi}_0 + \dot{\theta}_1) \cos(\psi_0 + \theta_1) + 2l\dot{\psi}_0 \cos \psi_0 + \dot{y}_0) \cos(\psi_0 + \theta_1 + \theta_2) + (2l(\dot{\psi}_0 + \dot{\theta}_1) \sin(\psi_0 + \theta_1) + 2l\dot{\psi}_0 \sin \psi_0 - \dot{x}_0) \sin(\psi_0 + \theta_1 + \theta_2) + l(\dot{\psi}_0 + \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) &= 0.\end{aligned}$$

Zapíšeme tuto soustavu v maticovém tvaru:

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} -\sin \psi_0 & \cos \psi_0 & l & 0 & 0 \\ -\sin(\psi_0 + \theta_1) & \cos(\psi_0 + \theta_1) & c_1 & l & 0 \\ -\sin(\psi_0 + \theta_1 + \theta_2) & \cos(\psi_0 + \theta_1 + \theta_2) & c_2 & c_3 & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

kde \mathbf{A} je matice soustavy,

$$\begin{aligned}c_1 &= 2l \cos(\psi_0) \cos(\psi_0 + \theta_1) + 2l \sin(\psi_0) \sin(\psi_0 + \theta_1) + l, \\ c_2 &= (2l \cos(\psi_0 + \theta_1) + 2l \cos(\psi_0)) \cos(\psi_0 + \theta_1 + \theta_2) + (2l \sin(\psi_0 + \theta_1) + 2l \sin(\psi_0)) \sin(\psi_0 + \theta_1 + \theta_2) + l, \\ c_3 &= 2l \cos(\psi_0 + \theta_1) \cos(\psi_0 + \theta_1 + \theta_2) + 2l \sin(\psi_0 + \theta_1) \sin(\psi_0 + \theta_1 + \theta_2) + l.\end{aligned}$$

Jedná se o soustavu tří homogenních lineárních diferenciálních rovnic s nekonstantními koeficienty (jednotlivé stavové proměnné jsou závislé na čase) prvního řádu o pěti neznámých, kterou nejsme schopni obecně řešit. Zavedme značení:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= u_1, \\ \dot{\theta}_2 &= u_2.\end{aligned}$$

Nyní převedeme parametry u_1, u_2 soustavy (15) na pravou stranu:

$$\begin{pmatrix} -\sin \psi_0 & \cos \psi_0 & l \\ -\sin(\psi_0 + \theta_1) & \cos(\psi_0 + \theta_1) & c_1 \\ -\sin(\psi_0 + \theta_1 + \theta_2) & \cos(\psi_0 + \theta_1 + \theta_2) & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi}_0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ l & 0 \\ c_3 & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Vynásobením soustavy maticí \mathbf{A}^{-1} dostáváme:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \psi_0 & \cos \psi_0 & l \\ -\sin(\psi_0 + \theta_1) & \cos(\psi_0 + \theta_1) & c_1 \\ -\sin(\psi_0 + \theta_1 + \theta_2) & \cos(\psi_0 + \theta_1 + \theta_2) & c_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -l & 0 \\ -c_3 & -l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Označme součin matic $\mathbf{G} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -l & 0 \\ -c_3 & -l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} \\ g_{21} & g_{22} \\ g_{31} & g_{32} \end{pmatrix}$. Pak řídicí systém zapíšeme v konečném tvaru

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi}_0 \end{pmatrix} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

K soustavě (16) přidáme tyto dvě rovnice:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= u_1, \\ \dot{\theta}_2 &= u_2. \end{aligned}$$

Nyní jsme schopni systém zapsat ve vektorovém tvaru:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{g}_1 u_1 + \mathbf{g}_2 u_2, \quad (17)$$

přičemž $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ jsou sloupce rozšířené matice $\mathbf{G}^* = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} \\ g_{21} & g_{22} \\ g_{31} & g_{32} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

\mathbf{g}_1 a \mathbf{g}_2 nazveme řídicími vektorovými poli. Soustava (17) tvoří dle Definice 7 spolu se svou řešící funkcí dynamický systém.

Při odvozování systému (16) jsme využili násobení inverzní maticí \mathbf{A}^{-1} . Aby byla existence inverzní matice zaručena, musí být matice soustavy \mathbf{A} regulární (tedy její determinant je nenulový). Rozeberme nyní tento případ:

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = -\frac{1}{d} \neq 0,$$

kde

$$\begin{aligned} d &= 2l((- \cos(\psi_0) \cos(\psi_0 + \theta_1) \sin(\psi_0 + \theta_1) + (\cos(\psi_0 + \theta_1))^2 \sin(\psi_0) - 1/2 \sin(\psi_0) - \\ &\quad 1/2 \sin(\psi_0 + \theta_1)) \cos(\psi_0 + \theta_1 + \theta_2) + 1/2 \sin(\psi_0) \cos(\psi_0 + \theta_1)) + \\ &\quad ((\cos(\psi_0 + \theta_1))^2 \cos(\psi_0) + \cos(\psi_0 + \theta_1) \sin(\psi_0 + \theta_1) \sin(\psi_0) - \\ &\quad 1/2 \cos(\psi_0) + 1/2 \cos(\psi_0 + \theta_1)) \sin(\psi_0 + \theta_1 + \theta_2) - 1/2 \cos(\psi_0) \sin(\psi_0 + \theta_1). \end{aligned}$$

Vidíme, že je tato nerovnost splněna pokaždé, pokud je determinant definován - to znamená, že $d \neq 0$. Pokud v nějaké poloze q není determinant definován, nazveme ji singulární. Příkladem singulární polohy je například had ležící na přímce (to znamená, že $\theta_1 = \theta_2 = 0$), a nebo případ, kdy středy všech článků hada leží na jedné kružnici (tj. $\theta_1 = \theta_2$).

V případě našeho řídicího systému vektorová pole spolu s jejich Lieovými závorkami prvního stupně nepokryjí celý tečný prostor. Ke kompletnímu pokrytí musíme použít řídicí pole $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ a Lieovy závorky až do druhého řádu, to jsou $[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]$, $[\mathbf{g}_1, [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]]$ a $[\mathbf{g}_2, [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]]$. Filtrace našeho systému je (2, 3, 5).

6.2 Formulace úlohy optimálního řízení

Naší úlohou je řídit systém (6) z počátečního bodu $q_0 \in \mathbb{R}^2 \times S^3$ v čase $t = 0$ do bodu $q_f \in \mathbb{R}^2 \times S^3$ v čase $t = 1$. Jako vhodnou podmínku budeme uvažovat, aby byl input u systému nejmenší, takže požadujeme, aby funkcionál

$$\int_0^1 \|u\|^2 dt$$

byl minimální. Tento problém převedeme na minimalizaci Lagrangiánu $\dot{q}_4^2 + \dot{q}_5^2$. Rovnice $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$ nám dávají podmínku pro vázaný extrém. Využitím Lagrangeových multiplikátorů můžeme tedy rovnici zapsat v následujícím tvaru:

$$L(\dot{q}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = u_1^2 + u_2^2 + \lambda_1(\dot{q}_1 - g_{11}u_1 + g_{12}u_2) + \lambda_2(\dot{q}_2 - g_{21}u_1 + g_{22}u_2) + \lambda_3(\dot{q}_3 - g_{31}u_1 + g_{32}u_2).$$

Hledáme extrémy této funkce. Aby v nějakém bodě byl extrém, musí platit, že všechny parciální derivace jsou nulové. Tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} &= 0 \quad \text{pro } i = 1, \dots, 5, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} &= 0 \quad \text{pro } j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy rovnic bychom došli ke tvaru optimálních inputů. Obecně ovšem tento problém řešitelný není; jde o soustavu nelineárních diferenciálních rovnic s nekonztantními koeficienty.

6.3 Motion planning

Využitím modelu, který jsme výše odvodili, jsme již schopni řídit robotického hada. Připomeňme, že had není říditelný v polohách, ve kterých není systém (17) definován; tyto polohy jsme nazvali singulární. Pokud chceme obecně vyjádřit, jak se systém (17) pohne v určité proměnné za časový úsek $(0, \tau)$ teoreticky přesně, pak lze posun určit integrací jednotlivých rovnic:

$$\Delta q_i = \int_0^\tau (g_{i1}\dot{\theta}_1 + g_{i2}\dot{\theta}_2) dt. \quad (18)$$

Tento přístup ovšem není použitelný, jelikož integrál (18) obecně nedokážeme řešit, jelikož nejsme schopni určit tvary $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2$. Koeficienty g_{i1}, g_{i2} jsou obecně nelineární a nekonztantní. Pro řízení pohybu v okolí bodu q_0 využíváme řídicí pole vyčíslené v tomto bodě. Tím během pohybu vzniká chyba, jelikož řídicí pole v každém bodě pohybu nabývají jiných hodnot.

Problém plánování trasy musíme tedy řešit lokálně. Úlohu zdiskretizujeme na plánování trasy na malých časových intervalech, aby byla odchylka skutečného pohybu od pohybu ve směru vektorových polí minimální. Využitím řídicích polí a jejich Lieových závorek až druhého stupně jsme schopni dosáhnout pohybu (ve stavovém prostoru) ve směru těchto polí. Jejich vyčíslením v libovolném bodě zjistíme směr, kterým se systém bude z tohoto bodu pohybovat. Zvolme například konfiguraci $q_0 = [0, 0, 0, \pi/3, -\pi/3]$:

$$\mathbf{g}_1(q_0) = (0, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 1, 0), \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_2(q_0) &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 1\right), \\
[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2](q_0) &= \left(\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9}, 0, 0, 0\right), \\
[\mathbf{g}_1, [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]](q_0) &= \left(-\frac{2\sqrt{3}}{27}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, 0, 0\right), \\
[\mathbf{g}_2, [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2]](q_0) &= \left(\frac{8\sqrt{3}}{27}, -\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, 0, 0\right).
\end{aligned}$$

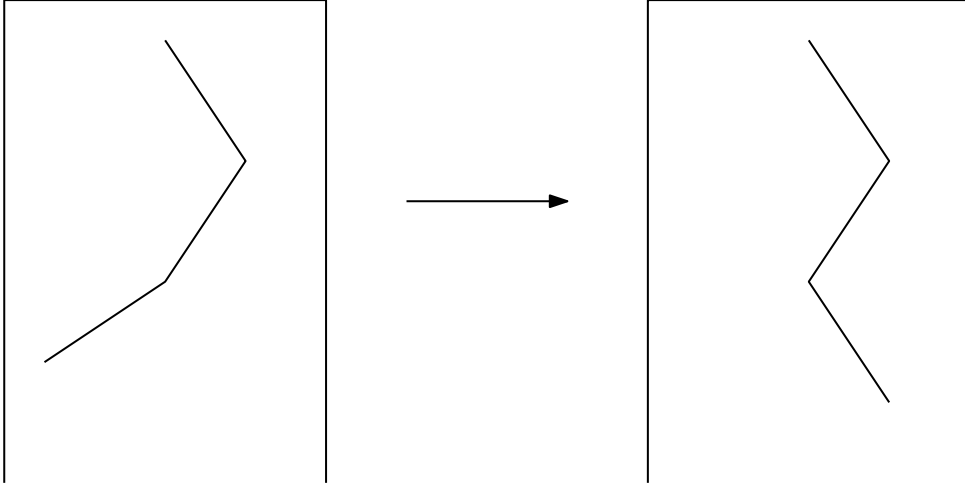
Všimněme si, že pokud zvolíme takovou konfiguraci, kde $\theta_1 = \theta_2$, pak platí, že Lieova závorka prvního řádu vyjadřuje pohyb pouze v osách x a y .

Chceme-li robotem pohnout ve směru osy x , vidíme, že nám stačí jít ve směru kombinace polí \mathbf{g}_1 a \mathbf{g}_2 , zvolíme tedy například inputy $u_1 = t, u_2 = -2t$. Pohybu ve směru osy y zároveň s rotací dosáhneme volbou inputů $u_1 = t, u_2 = 0$. Aplikace řídicího algoritmu systémů druhého stupně je následující:

Algoritmus 3.

1. Přímou řídit relativní natočení článků, tedy úhly θ_1, θ_2 . Tím dojde k driftu v ostatních stavových proměnných - had se tedy pohne v prostoru a natočí.
2. Využitím vhodně zvoleného periodického inputu aproximujeme pohyb ve směru Lieových závorek (dle volby inputu dosáhneme pohybu ve směru libovolného řádu závorek). Tím navrátíme hada do původního bodu v prostoru (souřadnice x, y) a natočení ψ_0 .

Aplikací tohoto algoritmu jsme schopni měnit relativní úhly natočení článků bez jakéhokoli relativního pohybu v prostoru. Jedná se o metodu řízení pomocí po částech konstantních inputů.



Obrázek 2: Příklad využití Algoritmu 3 k rekonfiguraci.

Na Obrázku 2 vidíme aplikaci Algoritmu 3 k rekonfiguraci hada v omezeném prostoru do lepší výchozí polohy pro další pohyby.

Navrháme nyní další algoritmus řízení, pomocí kterého se budeme pohybovat v prostoru obecně:

Algoritmus 4.

1. Zvolíme malý časový krok τ a vhodný input $\mathbf{u} = (\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$ tak, aby se had v prostoru pohnul v požadovaném směru s využitím řídicích polí a jejich závorek.
2. Vybereme jednu z možností: buď přepočteme řídicí pole, a nebo využijeme výše uvedeného algoritmu k navrácení do původní konfigurace.
3. Algoritmus opakujeme.

V případě výše uvedených algoritmů je nutné dávat pozor na konstrukční omezení robota - pokud bychom řízením směřovali do nedosažitelných oblastí stavového prostoru, výsledný pohyb nebude odpovídat našim řídicím polím.

6.4 Dopředný pohyb

Pro optimální dopředný pohyb hada bylo z pozorování pohybu reálného hada zjištěno, že úhly relativního natočení θ_i opisují takzvanou serpenoidní křivku. Jejich tvar je

$$\theta_i = \alpha \sin(\omega t + (i - 1)\delta) + \beta_0, \quad i \in 1, \dots, N - 1,$$

kde N je počet článků, ω je úhlová frekvence, α je amplituda, δ vyjadřuje fázový posun mezi články a β_0 je kloubový posun, který uvazujeme stejný pro všechny články.

Všimněme si, že pokud budeme řídit relativní natočení úhlů robotického hada podle serpenoidní křivky, dostáváme periodický input, který aproximuje pohyb ve směru Lieovy závorky. Had tedy koná pouze dopředný pohyb.

Serpenoidní input je tedy vhodný pro dopředný pohyb, na jeho efektivitu má ovšem velký vliv počet článků hada. U nízkého počtu článků pohyb nekopíruje křivku přesně a u jednotlivých článků dochází ke značnému smyku.

Odvození vhodného inputu bylo provedeno v prostředí Maple a následně byl algoritmus demonstrován v prostředí V-REP.

I přes nízký počet článků hada v našem modelu využijeme serpenoidního inputu. Sestavme algoritmus založený na principu plánování pomocí kanonických drah pro efektivní dopředný pohyb za využití serpenoidního inputu:

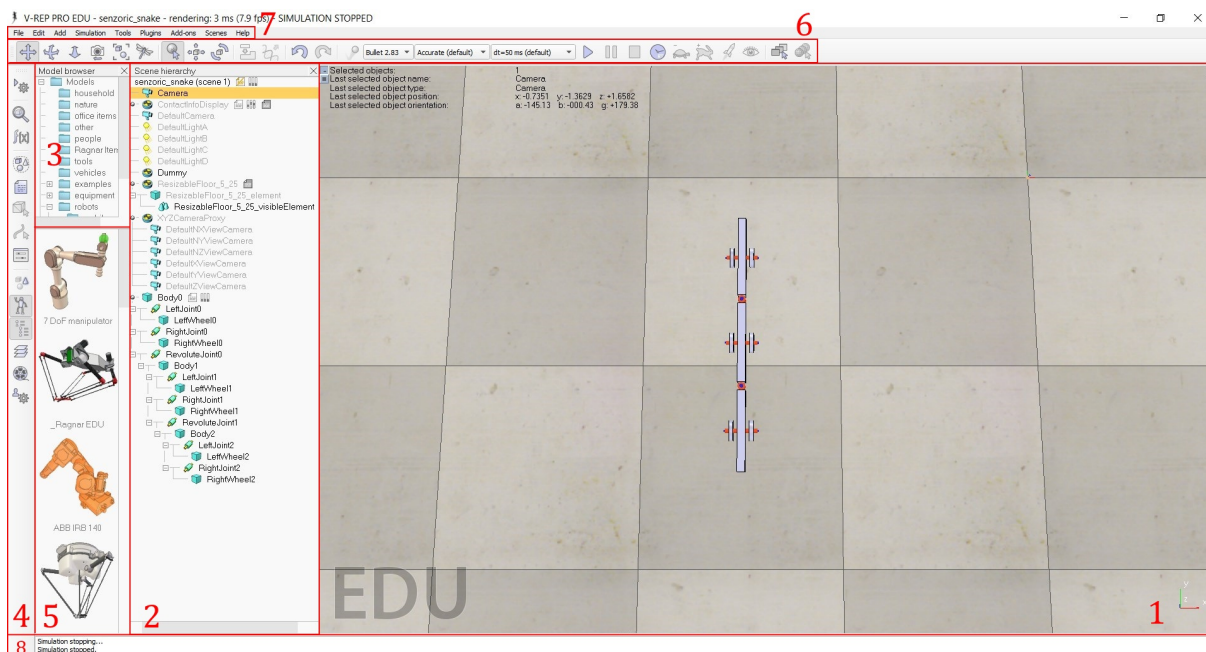
Algoritmus 5.

1. Využijeme pohyb ve směru řídicích polí a Lieových závorek druhého stupně pro natočení hada do požadovaného směru.
2. Hada řídíme pomocí serpenoidního inputu. Tento pohyb odpovídá směru Lieovy závorky prvního řádu. Platí, že pokud jsou relativní úhly natočení hada na začátku periody serpenoidního pohybu stejné, pak absolutní natočení ψ_0 je na konci periody stejné jako na začátku.

Aplikací tohoto algoritmu jsme schopni řídit robotického hada tak, aby se optimálně pohyboval v dopředném směru.

7 Simulační prostředí V-REP

Pro ověření vytvořeného modelu bylo použito simulační prostředí pro robotiku V-REP. Jedná se o framework zahrnující IDE, zahrnující knihovny důležité pro simulování a vývoj robotických systémů.



Obrázek 3: Simulační prostředí V-REP

1. Hlavní okno simulace - zde se nachází vykreslení simulace. V levém horním rohu je výpis informací o posledním vybraném objektu.
2. Hierarchie scény - v tomto menu vidíme všechny objekty, které se v celé simulaci nacházejí. Můžeme zde objekty měnit a přidávat. Pokud jsou objekty složené, zobrazují se od objektu základního. Dvojkliknutím na ikonu listů vedle objektu se dostaneme ke skriptům objektu.
3. Prohlížeč objektů - odtud můžeme do scény přidávat běžně používané předměty.
4. Postranní panel - slouží pro rychlý přístup k nejpoužívanějším oknům.
5. Prohlížeč modelů - aktivní podokno z postranního panelu - slouží k umístění vzorových robotů do simulace.
6. Panel nástrojů - slouží pro přepínání módu myši (akce při kliknutí, styl navigace kamery), pro spuštění/zastavení simulace a změnu její rychlosti. Lze zde také zvolit, jaký simulační engine bude simulace využívat, přesnost a velikost časového kroku.
7. Hlavní panel nástrojů - zde je přístup k menu souboru, menu editace vybraného objektu, menu pro přidání nových objektů, menu simulace pro správu chodu simulace a výběru simulačního engine, menu nástrojů, menu pluginů, menu přídavek, menu pro výběr scény a menu nápovědy.
8. Výpis ze simulace.

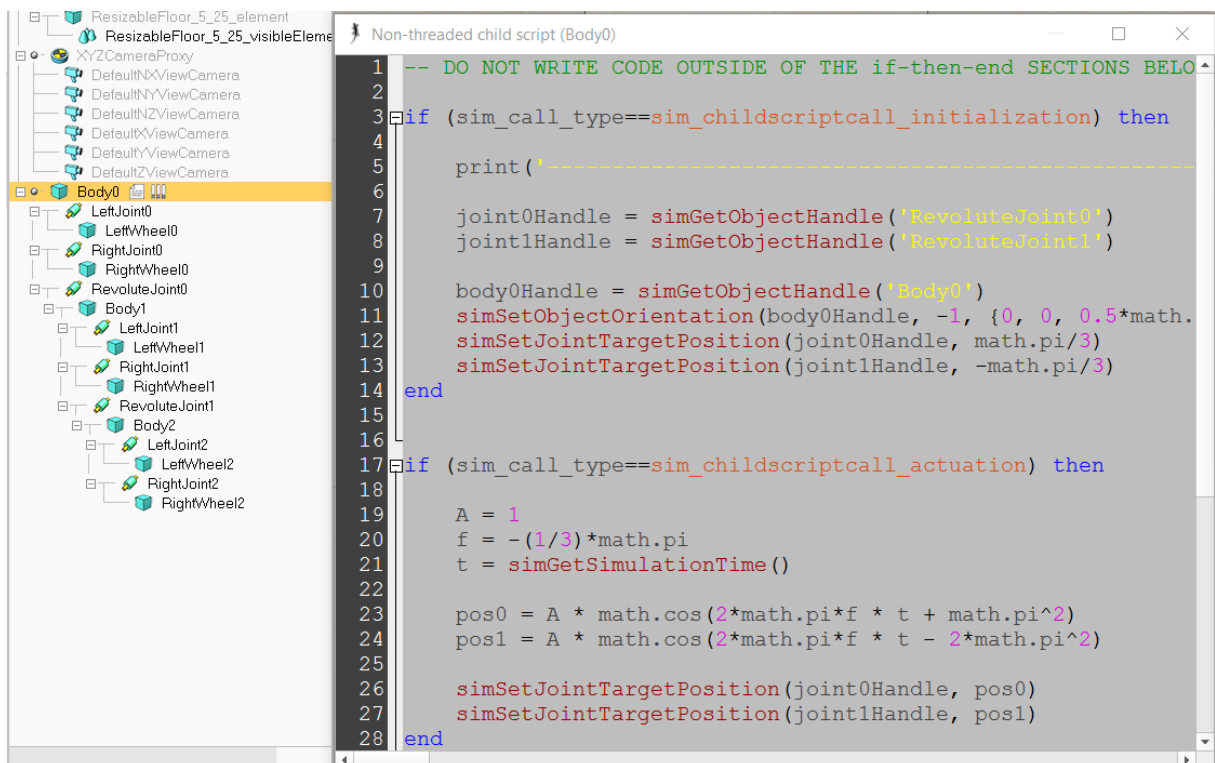
Simulace řídíme pomocí skriptů. V-REP obsahuje API pro jazyky C, C++, Python, Java, Lua, Matlab a Octave. Skripty jsou přiřazené celku objektů (tělesu) a nebo přímo scéně (hlavní skript - každá scéna má defaultně přiřazený jeden hlavní skript). Každá simulace obsahuje 4 fáze, které probíhají v každém časovém kroku simulace. Skripty obsahují kód pro jednotlivé fáze. U objektů se krok dělí na 4 fáze:

1. Initialization - fáze inicializace; kód fáze inicializace se volá na začátku simulace nebo při vytvoření nového objektu během simulace.

2. Actuation - fáze ovládání; tato fáze probíhá jako první během každého časového kroku simulace.
3. Sensing - fáze senzorů; tato fáze probíhá po fázi ovládání během každého časového kroku.
4. Cleanup - fáze úklidu; proběhne na konci simulace a při zaniknutí objektu.

Skripty pro scény obsahují pouze 3 fáze, a to:

1. Initialization - fáze inicializace, obdobně jako u objektů se volá na začátku simulace.
2. Regular part - hlavní část, která se volá každý časový krok. Obsahuje všechnu funkcionalitu simulátoru (kinematika, dynamika, senzory, atd.).
3. Restoration - část obnovení, která se volá na konci každé simulace. Slouží k obnovení původních konfigurací objektů, stavů senzorů, stavů kolizí atd.



Obrázek 4: Skript řízení robotického hada.

Na Obrázku 4 vidíme, jak vypadá skript v případě serpenoidního inputu. Rozeberme nyní, co jednotlivé příkazy dělají:

`print` - vypíše do konzole text

`simGetObjectHandle` - tato metoda vrátí referenci na objekt se jménem zadným v argumentu

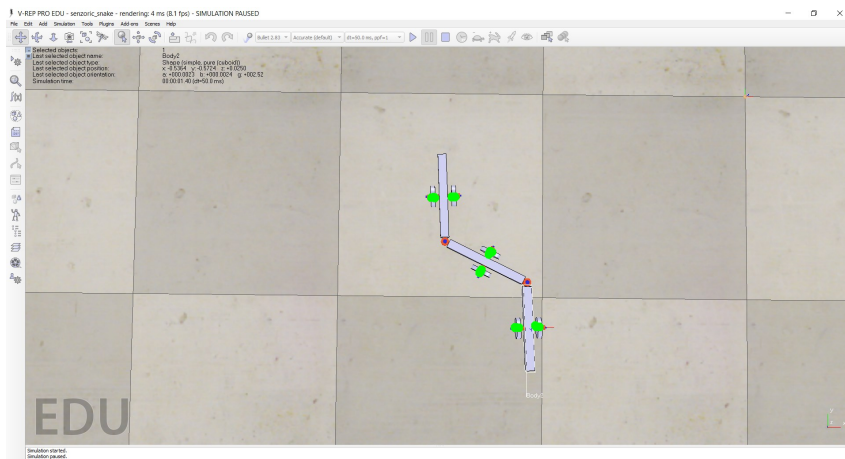
`simSetObjectOrientation` - nastaví polohu daného objektu

`simSetJointTargetPosition` - nastaví cílovou polohu, do které kloub bude rotovat

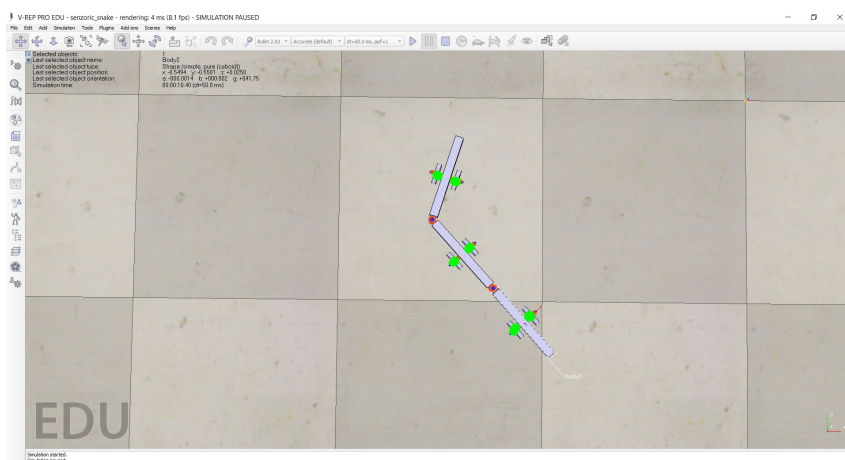
`simGetSimulationTime()` - vrátí aktuální čas simulace

Simulace serpenoidního pohybu `serpenoid.avi` je obsažena v příloze.

Dále uvedme simulaci pohybu hada ve směru řídicího pole \mathbf{g}_1 (19). Pokud by nedocházelo k žádnému smyku, souřadnice x hlavového článku hada by zůstala stejná, y by rostla a zároveň by došlo k rotaci, tedy změně ψ_0 . Pro řízení tedy využijeme input $u_1 = t$, $u_2 = 0$. Jako délku řízení zvolíme čas 0,9 sekund z důvodu minimalizace nepřesnosti, tedy zamezení smyku.



Obrázek 5: Počáteční poloha před začátkem pohybu.



Obrázek 6: Poloha na konci pohybu.

Změna souřadnic během pohybu je $\Delta x = 0,0130$, $\Delta y = 0,0223$. Vidíme tedy, že došlo i ke smyku ve směru osy x .

8 Závěr

V práci byl odvozen model řízení robotického hada o třech člancích s pasivními kolečky ve středu každého z nich. K odvození modelu byla využita neholonomní podmínka, která omezuje pohyb koleček z každého článku na dopředný, nedochází tedy ke smyku. Pomocí integrálního kritéria velikosti inputu byla formulována úloha optimálního řízení, která dále vedla na minimalizaci vázaného Lagrangianu; tato úloha obecně řešitelná není. Bylo popsáno řízení robotického hada, tedy řešení problému motion planningu. Hada byl řízen lokálně v malých časových úsecích pomocí řídicích vektorových polí a jejich Lieových závorek. Byla provedena diskuze, kdy je had říditelný. Byly navrženy celkem tři algoritmy, a to Algoritmus 3 pro změnu konfigurace bez relativního pohybu hada, Algoritmus 4, pomocí kterého jsme schopni se s hadem pohybovat v prostoru a Algoritmus 5 na bázi kanonických drah, který pro dopředný pohyb využil serpenoidního inputu.

Zajímavým výsledkem této bakalářské práce je fakt, že pro námi odvozený model, který je založen na neholonomní podmínce, serpenoidní input, který byl odvozen pozorováním pohybu reálného hada, odpovídá periodickému inputu, tedy pohybu ve směru Lieovy závorky řídicích polí. Ověřili jsme tedy, že pohyb reálného hada odpovídá pohybu popsaném nástroji diferenciální geometrie.

V poslední kapitole bylo popsáno simulační prostředí V-REP, ve kterém byly ilustrovány výsledky této práce. Pro veškeré výpočty provedené v práci byl využit matematický software Maple.

Literatura

- [1] MURRAY, R. M., Z. LI and S. SASTRY. *A mathematical introduction to robotic manipulation*. Boca Raton: CRC Press, c1994. ISBN 0-8493-7981-4.
- [2] JEAN, F. *Control of nonholonomic systems: from sub-Riemannian geometry to motion planning*. 1. New York: Springer, 2014. ISBN 978-3-319-08689-7.
- [3] R. W. Brockett. Control theory and singular Riemannian geometry. In P. Hinton and G. Young, editors, *New Directions in Applied Mathematics*, pages 11–27. Springer-Verlag, New York, 1981.
- [4] R. W. Brockett and L. Dai. Non-holonomic kinematics and the role of elliptic functions in constructive controllability. In Z. Li and J. F. Canny, editors, *Nonholonomic Motion Planning*, pages 1–22. Kluwer, 1993.
- [5] BÁRTA, Tomáš a Dalibor PRAŽÁK. OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE sbírka úloh a řešených příkladů: Dynamické systémy. *Matematická sekce RSS* [online]. [cit. 2017-05-25]. Dostupné z: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~barta/pcODR/index.html>

Seznam příloh

Příloha obsahuje CD, na kterém jsou obsaženy:

- Výpočty provedené v prostředí Maple v souborech determinant.mw a had.mw.
- Simulace v prostředí V-REP senzoric_snake.ttt.
- Videonahrávka ze simulace serpenoidního inputu serpenoid.avi